

## Sur une minoration du degré d'hypersurfaces s'annulant en certains points

Hélène Esnault<sup>1</sup> et Eckart Viehweg<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Université Paris VII, U.E.R. de Mathématiques, Tour 45–55, 5-ième étage, 2, Place Jussieu, F-75251 Paris Cedex 05, France

<sup>2</sup> Institut für Mathematik und Informatik, A 5, Seminargebäude, D-6800 Mannheim 1, République Fédérale Allemande

Donnons-nous un ensemble fini  $S$  de points  $p_i$  dans une sous-variété quasi-projective lisse  $X^0$  de  $\mathbb{P}^n$  sur le corps des nombres complexes  $\mathbb{C}$ . Appelons  $Z$  la complétée projective de  $X^0$  dans  $\mathbb{P}^n$ . On introduit les entiers

$$\omega_i(S, Z) = \inf \{d; \text{il existe } f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n] - \mathcal{I}(Z), \\ f \text{ homogène de degré } d, \text{ tel que } f \in \mathcal{M}_{p_i, Z}^t \text{ pour} \\ \text{tout } p_i \in S\},$$

où  $\mathcal{M}_{p_i, Z}$  est l'idéal maximal de  $p_i$  dans  $Z$  et  $\mathcal{I}(Z)$  l'idéal homogène de  $Z$ .

Comme corollaire de résultats dûs à Enrico Bombieri sur la théorie des estimations  $L^2$  et des théorèmes d'existence pour l'opérateur  $\bar{\partial}$ , une inégalité est démontrée entre  $\omega_t(S, \mathbb{P}^n)$  et  $\omega_{t'}(S, \mathbb{P}^n)$ , pour deux entiers positifs  $t$  et  $t'$ , que Skoda améliore sous la forme

$$\frac{\omega_{t'}(S, \mathbb{P}^n)}{t' + n - 1} \leq \frac{\omega_t(S, \mathbb{P}^n)}{t}.$$

Pour toutes ces notions et les références précises correspondantes, nous renvoyons au livre de Waldschmidt [6, Sect. 7].

Chudnovsky conjecture l'inégalité

$$\frac{\omega_1(S, \mathbb{P}^n) + n - 1}{n} \leq \frac{\omega_t(S, \mathbb{P}^n)}{t} \quad (*)$$

qu'il prouve dans le cas  $n=2$ . Demailly redémontre (\*) par des méthodes analytiques dans le cas  $n=2$  ou bien dans celui où  $S$  contient un polytope complet à

$$\binom{\omega_1(S, \mathbb{P}^n) + n - 1}{n}$$

sommets. Indépendemment, Wüstholtz et Masser, l'un par des méthodes d'algèbre commutative et de théorie de l'intersection, l'autre d'algèbre linéaire, démontrent

une inégalité un peu moins précise que celle de Bombieri-Skoda-Waldschmidt, qu'ils peuvent améliorer dans le cas  $n=2$  par des méthodes locales pour redonner (\*). Par ailleurs, Wüstholz prouve aussi l'inégalité

$$\frac{H(\omega_1(S, Z) - 1; Z)}{\omega_1(S, Z)^{m-1} \cdot \deg(Z)} \leq \frac{\omega_t(S, Z)}{t},$$

où  $H(x; Z)$  est la fonction de Hilbert de  $Z$ ,  $\deg(Z)$  son degré et  $m$  sa dimension. Nous renvoyons ici par exemple à [7] et [8] et aux références correspondantes.

Dans cet article nous prouvons par des méthodes de géométrie projective complexe les inégalités

$$\frac{\omega_t(S, \mathbb{P}^n) + 1}{t' + n - 1} \leq \frac{\omega_t(S, \mathbb{P}^n)}{t}, \quad \text{pour } n \geq 2 \quad (\text{A})$$

$$\frac{\omega_t(S, Z) + 1 - \deg(Z)}{t' + m - 1} \leq \frac{\omega_t(S, Z)}{t}, \quad m = \dim(Z) \geq 1 \quad (\text{B})$$

(voir Par. 1, Théorème II, Théorème I et Remarque (1.1), pour les énoncés précis).

Autant que nous sachions – et en tant que non spécialistes nous espérons n'avoir oublié ni de résultats ni de noms importants – l'inégalité (A) englobe et étend toutes les autres concernant  $\omega_t(S, \mathbb{P}^n)$ . En tenant compte des «mauvaises» singularités d'une hypersurface attachée à  $\omega_t(S, \mathbb{P}^n)$  et de leur codimension, nous sommes en mesure de l'améliorer sensiblement [Remarque (1.2)]. Il nous semble que le point de vue adopté ici met en relief le lien entre d'une part le comportement de  $\omega_t(S, Z)$  en fonction de celui de  $\omega_t(S, \mathbb{P}^n)$  et d'autre part le rôle joué par le lieu singulier de l'hypersurface associée à  $\omega_t(S, Z)$ . L'inégalité (B) est un cas spécial d'un résultat de type Bombieri-Skoda-Waldschmidt où l'on autorise  $S$  à être un ensemble de sous-variétés quelconques de  $X^0$ .

## 1. Enoncé des résultats

Soit  $X^0$  une sous-variété quasi-projective lisse de  $\mathbb{P}^n$ . On appelle *degré* de  $X$  le degré de sa complétée projective  $Z$  dans  $\mathbb{P}^n$ .

Soit  $X_j^0$  une sous-variété réduite et irréductible de  $X^0$ , de complétée projective  $Z_j$  dans  $Z$ . On dit qu'une section  $s$  de  $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$  s'annule à l'ordre  $t_j$  le long de  $X_j^0$  et ne s'annule pas le long de  $X^0$  si, dans l'anneau local  $\mathcal{O}_{Z_j, Z}$ ,  $s$  est dans  $\mathcal{M}^{t_j}$  et est non nulle, où  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{Z_j, Z}$  est l'idéal maximal. Bien sûr,  $s$  a le droit d'être dans  $\mathcal{M}^{t_j+r}$  pour  $r \geq 0$ .

Comme de coutume, on définit l'entier  $[b]$ , pour tout réel  $b$ , par  $b-1 < [b] \leq b$ .

**Théorème I.** Soit  $S = \{X_j^0; j=1, \dots, v\}$  un ensemble fini de sous-variétés réduites et irréductibles  $X_j^0$ , de dimensions  $n_j$ , d'une variété quasi-projective lisse  $X^0$  de dimension  $m \geq 1$  de  $\mathbb{P}^n$ . Supposons qu'il existe une section  $s$  de  $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$  qui s'annule à un ordre donné  $t_j \geq 1$  le long de  $X_j^0$ , pour  $j=1, \dots, v$ , sans s'annuler le long de  $X^0$ . Fixons des entiers  $t'_j \geq 1$ , et

$$i \geq [(t'_j + m - n_j - 1) \cdot d \cdot t_j^{-1}] + 1$$

pour  $j=1, \dots, v$ .

Alors il existe une section de  $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\deg(X^0) + i - 2))$  qui s'annule le long de  $X_j^0$  à l'ordre  $t'_j$ , pour tout  $j = 1, \dots, v$ , sans s'annuler le long de  $X^0$ .

*Remarque (1.1).* Si  $n_1 = n_2 = \dots = n_v = 0$ , c'est-à-dire si  $S$  est un ensemble de points, en posant  $t_1 = \dots = t_v = t$  et  $t'_1 = \dots = t'_v = t'$  on trouve

$$\omega_t(S, Z) \leq (t' + m - 1) \cdot d \cdot t^{-1} - 1 + \deg(Z)$$

et donc l'inégalité (B).

**Théorème II.** Soit  $S$  un ensemble fini de points  $p_j$  dans  $\mathbb{P}^n$ ,  $n \geq 2$ . Alors, s'il existe une section non nulle  $s$  de  $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$  qui s'annule à l'ordre  $t \geq 1$  en tout  $p_j$  de  $S$ , il existe pour  $i \geq 2$  une section non nulle de  $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(i - 2))$  qui s'annule en tout  $p_j$  de  $S$  à l'ordre  $t' \geq 1$  dès que

$$i \geq [(t' + n - 1) \cdot d \cdot t^{-1}] + 1.$$

*Remarque (1.2).* Dans la démonstration (Par. 4) il apparaîtra que les «mauvaises singularités» du diviseur  $V(s)$  associé à  $s$  jouent un «mauvais tour». Celles que nous appelons mauvaises ne sont que les singularités en lesquelles le diviseur réduit associé à  $V(s)$  n'est pas à croisements normaux. Pour  $\beta \leq n$ , les mauvaises singularités étant en codimension supérieure ou égale à  $\beta$  par rapport à  $\mathbb{P}^n$ , nous démontrons l'inégalité

$$(\omega_t(S, \mathbb{P}^n) + \beta - 1) \cdot (t' + n - 1)^{-1} \leq d \cdot t^{-1}.$$

Puisque pour  $n \geq 2$ , on peut toujours choisir au pire  $\beta = 2$ , on obtient ainsi le théorème II. On atteindrait alors la conjecture de Chudnovsky (\*) si l'on savait que l'hypersurface associée à  $\omega_t(S, \mathbb{P}^n)$  n'a de mauvaises singularités que des singularités isolées, i.e.  $\beta = n$ .

*Remarque (1.3).* On pourrait aussi, dans le cas où le support n'est plus  $\mathbb{P}^n$  mais un  $Z$  quelconque, introduire les mauvaises singularités du diviseur  $V(s) \cap Z$  de  $Z$  associé à une section  $s$  de  $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ , comme sous-variété de  $Z$  où  $Z$  et  $V(s)$  ne se coupent pas transversalement. Malheureusement, même si  $Z$  est lisse, ces singularités peuvent être en codimension 1, de sorte que la formulation générale du théorème I ne s'en trouverait pas améliorée. C'est pourquoi nous ne parlerons pas de cet «essai manqué».

*Notations.* Rappelons que nous donnons dans les paragraphes suivants une démonstration des théorèmes I et II dans le cadre de la géométrie algébrique complexe. Pour ce, nous utilisons les notations du livre de Hartshorne [4], avec une exception : si  $Y$  est une variété algébrique et  $D$  un diviseur de Cartier, on note  $\mathcal{O}_Y(D)$  le faisceau inversible associé (contrairement à la notation  $\mathcal{L}(D)$  utilisée dans [4, p. 144]). Par ailleurs, on ne confondra pas le  $\omega_t(S, Z)$  des arithméticiens avec le faisceau dualisant  $\omega_Y$ .

## 2. Préliminaires

(2.1)

Soit  $B$  un diviseur effectif sur une variété projective lisse complexe  $Y$ . On pose  $B = \sum v_j \cdot E_j$ , où les  $E_j$  sont les composantes irréductibles de  $B$ . Si l'on suppose que

ce diviseur est associé à une puissance positive  $\mathcal{L}^d$  d'un faisceau inversible  $\mathcal{L}$ , i.e.  $\mathcal{L}^d = \mathcal{O}_Y(\sum v_j \cdot E_j)$ , on pose, pour tout  $i \geq 0$ ,

$$\mathcal{L}^{(i)} = \mathcal{L}^i \otimes \mathcal{O}_Y(-\sum [v_j \cdot i \cdot d^{-1}] \cdot E_j).$$

Si  $0 \leq i < d$ , la définition de  $\mathcal{L}^{(i)}$  ne fait intervenir que les  $E_j$  pour lesquels  $v_j \geq 2$ . Lorsque l'on voudra souligner le rôle de la partie réduite  $D$  de  $B$ , on écrira

$$B = D + \sum_{v_j \geq 2} v_j \cdot E_j, \quad \text{où} \quad D = \sum_{v_j = 1} v_j \cdot E_j.$$

(2.2)

On suppose que le diviseur  $B$  de (2.1) est à *croisement normaux*, c'est-à-dire que les  $E_j$  sont lisses et se coupent transversalement. La section  $s$  de  $\mathcal{L}^d$ , de support  $B$ , définit sur le faisceau de  $\mathcal{O}_Y$ -modules  $\mathcal{A} = \bigoplus_{i=0}^{d-1} \mathcal{L}^{-i}$  une structure d'algèbre. En effet, la multiplication de  $\mathcal{A}$  est définie par la multiplication

$$\mathcal{L}^{-i} \oplus \mathcal{L}^{-j} \rightarrow \mathcal{L}^{-i} \otimes \mathcal{L}^{-j} = \mathcal{L}^{-i-j},$$

une fois identifié  $\mathcal{L}^{-d}$  à un sous-faisceau de  $\mathcal{L}^0 = \mathcal{O}_Y$  par la section duale de  $s$ . On note  $W$  la normalisation de  $\text{Spec}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{A})$ ,  $V$  une désingularisation de  $W$  et comme suit les morphismes associés

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{g} & W \\ & \searrow f & \downarrow \tau \\ & & Y \end{array}$$

La variété  $W$  sera dite *extraction  $d$ -ième du diviseur  $B$* .

**Lemme** ([1, Par. 1] et [2, Par. 1]). i)  $W$  n'a que des singularités rationnelles (i.e.  $R^i g_* \mathcal{O}_V = 0$  pour  $i \neq 0$ ). En particulier  $W$  est de Cohen-Macaulay, et  $\tau$  est plat.

$$\text{ii) On a } \tau_* \mathcal{O}_W = \bigoplus_{i=0}^{d-1} \mathcal{L}^{(i)-1} \text{ et donc } R^i f_* \mathcal{O}_V = \begin{cases} \bigoplus_{i=0}^{d-1} \mathcal{L}^{(i)-1}, & i=0 \\ 0, & i \neq 0 \end{cases}.$$

**Théorème (2.3.1).** Soient  $Y$ ,  $B$  et  $\mathcal{L}$  comme dans (2.2) et  $\omega_Y$  le faisceau canonique. Supposons que la dimension de Kodaira de  $\mathcal{L}$  vérifie  $\kappa(\mathcal{L}) = \dim(Y) = n$ , et que  $\mathcal{L}$  est engendré par ses sections globales. Alors on a

$$H^q(Y, \omega_Y \otimes \mathcal{L}^{(i)} \otimes \mathcal{L}^k) = 0$$

pour tous  $k > 0$ ,  $q > 0$  et  $i \geq 0$ .

*Démonstration.* D'après (2.2) et la dualité de Serre [4, III, Par. 7], on a

$$\begin{aligned} H^q(V, \omega_V \otimes f^* \mathcal{L}^k) &= H^{n-q}(V, f^* \mathcal{L}^{-k}) = \bigoplus_{i=0}^{d-1} H^{n-q}(Y, \mathcal{L}^{(i)-1} \otimes \mathcal{L}^{-k}) \\ &= \bigoplus_{i=0}^{d-1} H^q(Y, \omega_Y \otimes \mathcal{L}^{(i)} \otimes \mathcal{L}^k). \end{aligned}$$

Le faisceau  $f^*\mathcal{L}^k$  étant de dimension de Kodaira maximum et engendré par ses sections globales, on peut appliquer le théorème d'annulation de Grauert et Riemenschneider [3] pour trouver le résultat pour  $i < d$ . Si  $i \geq d$ , on écrit  $\mathcal{L}^{v \cdot d} = \mathcal{O}_Y(v \cdot B)$  pour  $i < v \cdot d$ .

En fait, le théorème (2.3.1) est un cas particulier du

**Théorème (2.3.2)** ([2, Par. 2] ou [5]). *Soient  $Y, B$  et  $\mathcal{L}$  comme dans (2.2). Supposons de plus que la dimension de Kodaira de  $\mathcal{O}_Y(D)$  vérifie  $\kappa(\mathcal{O}_Y(D)) = \dim(Y)$ . Alors on a*

$$H^q(Y, \omega_Y \otimes \mathcal{L}^{(i)}) = 0$$

pour tous  $q > 0$  et  $d > i > 0$ .

La démonstration repose sur les trois faits suivants :

- i) Le calcul des  $\mathcal{L}^{(i)}$  exposé en (2.2).
- ii) La symétrie des nombres de Hodge de la variété  $V$ .
- iii) La fermeture des formes différentielles globales à pôles logarithmiques le long d'un diviseur à croisements normaux.

Seul i) est purement algébrique. Jusqu'à présent, il n'y a pas de démonstration algébrique de ii) et iii).

(2.4)

Soit  $X^0$  une sous-variété quasi-projective lisse de dimension  $m \geq 1$  de  $\mathbb{P}^n$ . Soient  $Z$  sa complétée projective dans  $\mathbb{P}^n$  et  $\pi: X \rightarrow Z$  un morphisme birationnel tel que  $X$  soit lisse et projective. Au cours de la démonstration du théorème I, nous construisons des sections de certains faisceaux inversibles sur  $X$  que nous voulons identifier à la restriction sur  $X^0$  de fonctions polynômiales sur  $\mathbb{P}^n$ . Nous le faisons à l'aide de la proposition de «chasse aux sections» qui suit. Soient  $X'$  la normalisée de  $Z$  et

$$\begin{array}{ccccc} X & & \searrow \pi & & \\ \downarrow & & & & \\ X' & \xrightarrow{\pi'} & Z & \hookrightarrow & \mathbb{P}^n \end{array}$$

les morphismes correspondants. Appelons  $U$  l'ouvert des points lisses de  $X'$ .

Pour toute variété  $U'$  et tout morphisme  $\varphi: U' \rightarrow \mathbb{P}^n$ , on pose  $\mathcal{O}_{U'}(1) = \varphi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ . Pour tout  $l$ , appelons  $\theta_l$  la composition des applications canoniques :

$$H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l)) \rightarrow H^0(Z, \mathcal{O}_Z(l)) \xrightarrow{\pi'^*} H^0(X', \mathcal{O}_{X'}(l)) \rightarrow H^0(U, \mathcal{O}_U(l)).$$

**Proposition.** *Il existe une injection*

$$j: \omega_U \rightarrow \mathcal{O}_U(\deg(X^0) - m - 2)$$

*vérifiant que, pour tout  $k$ , l'image par  $j$  de  $H^0(U, \omega_U \otimes \mathcal{O}_U(k))$  dans  $H^0(U, \mathcal{O}_U(\deg(X^0) - m - 2 + k))$  est contenue dans l'image de  $\theta_{\deg(X^0) - m - 2 + k}$ .*

**Démonstration.** Il suffit de démontrer la proposition où l'on remplace  $U$  par tout ouvert  $X_1$  de points lisses dont le complément  $X' - X_1$  est de codimension au moins deux. Choisissons une projection générique de degré 1 de  $Z$  sur  $Z'$ ,

hypersurface de degré  $\deg(X^0) = \deg(Z)$  dans  $\mathbb{P}^{m+1}$ . Notons  $\Delta$  le lieu de  $\mathbb{P}^n$  sur lequel cette projection n'est pas définie et comme suit les morphismes associés :

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{\pi'} & Z & \hookrightarrow & \mathbb{P}^n - \Delta \\ & \searrow p & \downarrow & & \downarrow p' \\ & & Z' & \hookrightarrow & \mathbb{P}^{m+1} \end{array}$$

Le morphisme  $p$  est fini. Posons  $X_1 = X' - p^{-1}(p(\text{Sing}(X')))$  et  $Z_1 = p(X_1)$ . Alors  $Z' - Z_1$  est de codimension au moins deux dans  $Z'$ .

En tant qu'hypersurface de  $\mathbb{P}^{m+1}$ ,  $Z'$  est de Gorenstein, donc admet un faisceau dualisant inversible vérifiant [4, II, Par. 8 et III, Par. 7]  $\omega_{Z'} = \mathcal{O}_{Z'}(\deg(X^0) - m - 2)$ .

On a donc  $\omega_{Z_1} = \mathcal{O}_{Z_1}(\deg(X^0) - m - 2)$ .

Par ailleurs, on a [4, III, Ex. 6.10 et 7.2]  $p_*\omega_{X_1} = \mathcal{H}om_{Z_1}(p_*\mathcal{O}_{X_1}, \omega_{Z_1})$ . Le conoyau  $\mathcal{C}$  de l'inclusion  $\mathcal{O}_{Z_1} \rightarrow p_*\mathcal{O}_{X_1}$  étant de torsion, on a  $\mathcal{H}om_{Z_1}(\mathcal{C}, \omega_{Z_1}) = 0$ , ce qui fournit une inclusion

$$p_*\omega_{X_1} \rightarrow \omega_{Z_1} = \mathcal{O}_{Z_1}(\deg(X^0) - m - 2)$$

et donc un morphisme non nul

$$j' : p^*p_*\omega_{X_1} \rightarrow p^*\omega_{Z_1}.$$

Le noyau  $\mathcal{F}$  de la surjection canonique

$$p^*p_*\omega_{X_1} \rightarrow \omega_{X_1}$$

étant de torsion, on a  $j'|_{\mathcal{F}} = 0$ , donc  $j'$  se factorise en

$$j : \omega_{X_1} \rightarrow p^*\omega_{Z_1} = \mathcal{O}_{X_1}(\deg(X^0) - m - 2).$$

De plus, les deux faisceaux étant inversibles et  $j$  étant non nul,  $j$  est injectif. D'autre part,  $\Delta$  étant de codimension au moins deux dans  $\mathbb{P}^n$ , on a

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{P}^n - \Delta, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n - \Delta}(\deg(X^0) - m - 2 + k)) \\ = H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\deg(X^0) - m - 2 + k)). \end{aligned}$$

De même,  $Z' - Z_1$  étant de codimension au moins deux dans  $Z'$ , qui est de Gorenstein, a fortiori de Cohen-Macaulay, on a  $H^0(Z_1, \omega_{Z_1}(k)) = H^0(Z', \omega_{Z'}(k))$ . La flèche de restriction

$$\gamma : H^0(\mathbb{P}^{m+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{m+1}}(\deg(X^0) - m - 2 + k)) \rightarrow H^0(Z', \omega_{Z'}(k))$$

est surjective, son conoyau étant dans  $H^1(\mathbb{P}^{m+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{m+1}}(-m-2+k))$ , qui est nul car  $m \geq 1$ . On obtient les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{array}{ccccccc} & & H^0(X_1, \omega_{X_1}(k)) & & & & \\ & & \uparrow & \searrow j & & & \\ \beta & & H^0(X_1, p^*p_*\omega_{X_1}(k)) & \xrightarrow{j'} & H^0(X_1, p^*\omega_{Z_1}(k)) & \xleftarrow{\theta} & H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\deg(X^0) - m - 2 + k)) \\ & \uparrow p^* & & \alpha & \uparrow p^* & & \uparrow p^* \\ & & H^0(Z_1, p_*\omega_{X_1}(k)) & \hookrightarrow & H^0(Z_1, \omega_{Z_1}(k)) & \xleftarrow{\gamma} & H^0(\mathbb{P}^{m+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{m+1}}(\deg(X^0) - m - 2 + k)) \end{array}$$

où par définition  $\beta$  est l'identité et  $\alpha = j' \cdot p^*$ . Donc  $\text{Im}(j) = \text{Im}(\alpha)$  est contenu dans

$$p^*(H^0(Z_1, \omega_{Z_1}(k))) = \theta \cdot p'^*(H^0(\mathbb{P}^{m+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{m+1}}(\deg(X^0) - m - 2 + k))),$$

lui-même contenu dans  $\text{Im}(\theta)$ .

### 3. Démonstration du théorème I

(3.1)

Nous considérons la situation du Par. 1. Soient  $X^0$  quasi-projective lisse, de dimension  $m$ ,  $Z$  sa complétée projective dans  $\mathbb{P}^n$ ,  $\{X_j^0\}_{j=1, \dots, v}$  des sous-variétés réduites et irréductibles de  $X^0$ , de dimensions  $n_j$ ,  $Z_j$  leurs complétées projectives dans  $Z$ .

Soit maintenant  $X'$  la normalisation de  $X$ . Depuis Hironaka (voir [4, V, 3.8.1], pour les résultats et références correspondantes) on sait qu'il existe une variété projective lisse  $X$ , et un morphisme birationnel  $X \rightarrow X'$  obtenu par une suite finie d'éclatements à centres lisses situés au dessus du lieu singulier de  $X'$ . En particulier, on peut concevoir l'ensemble des points lisses de  $X'$  comme ouvert  $U$  de  $X$ . Dorénavant, on entendra par désingularisation de  $Z$  un tel morphisme birationnel  $\pi: X \rightarrow Z$  que l'on fixe une fois pour toutes. Appelons  $X_j$  la transformée stricte de  $Z_j$ , qui contient bien sûr  $X_j^0$ .

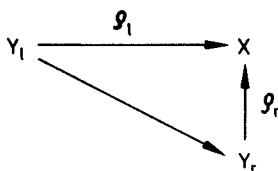
(3.2)

Nous construisons une désingularisation du diviseur  $V(s)$  associé à la section  $s$  du théorème I. Afin de simplifier la suite, nous la donnons «explicitement».

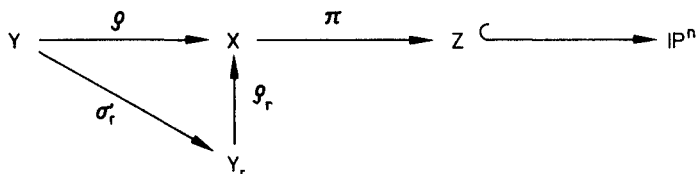
Ordonnons les dimensions  $n_j$  des  $X_j$  en  $m_1 < \dots < m_r$ . Considérons la sous-variété de  $X$  de dimension  $m_1$  :  $\bigcup_{n_j=m_1} X_j$ . Par une suite d'éclatements à centres lisses situés au dessus du lieu singulier de  $\bigcup_{n_j=m_1} X_j$ , on désingularise ce schéma réduit. En fait, ces éclatements sont la restriction d'éclatements de même centre, mais considérés dans  $X$  [4, II, 7.15], de sorte que la variété de plongement reste lisse. On a donc un éclaté de  $X$  dans lequel les transformés stricts des  $X_j$  sont lisses et deux à deux disjoints, pour  $n_j = m_1$ . Eclatons-les simultanément, ce qui revient à éclater leur réunion. Appelons  $q_1: Y_1 \rightarrow X$  le morphisme birationnel ainsi contruit et  $F_j^1$  le diviseur image inverse de  $X_j$  pour  $n_j = m_1$ . Comme  $q_1$  est composé d'éclatements à centres de dimension inférieure ou égale à  $m_1$ , l'image inverse stricte de  $X_j$ , que l'on note encore  $X_j$ , pour  $n_j \geq m_2$ , est birationnelle à  $X_j$ .

Prenons  $\bigcup_{n_j=m_2} X_j$  dans  $Y_1$  et faisons la même construction. On obtient ainsi un morphisme birationnel de  $Y_2$  vers  $Y_1$ , et donc un morphisme birationnel  $q_2: Y_2 \rightarrow X$ .

On note  $F_j^2$  le diviseur image inverse stricte de  $X_j$  dans  $Y_2$  pour  $n_j = m_2$ . On continue jusqu'à la dimension  $m_r$  et on note  $F_j^r$  les diviseurs lisses au-dessus de la transformée stricte de  $X_j$  dans  $Y_r$  pour  $n_j = m_r$ , et comme suit les morphismes birationnels obtenus:



Cela posé, on considère enfin  $\varrho_l^{-1}(V(s))$ , dont on fait une désingularisation plongée. Pour cela, on construit une variété projective et lisse  $Y$  par une suite d'éclatements de  $Y_l$  de sorte que le transformé total de  $\varrho_l^{-1}(V(s))$  soit un diviseur à croisements normaux. On note  $F_j$  les transformés stricts des  $F_j^r$  et comme suit les morphismes associés :



Posons, comme dans (2.4),  $\mathcal{O}_Z(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|_Z$ ,  $\mathcal{O}_X(1) = \pi^* \mathcal{O}_Z(1)$ ,  $\mathcal{L}_r = \varrho_r^* \mathcal{O}_X(1)$  et  $\mathcal{L} = \varrho^* \mathcal{O}_X(1)$ . La section  $s$  étant dans  $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ , la section  $\varrho^* \pi^* s$  est dans  $H^0(Y, \mathcal{L}^d)$  et son diviseur associé est un diviseur  $B$  à croisements normaux, transformé total de  $V(s)$ . Comme en (2.1), nous écrivons  $\mathcal{L}^d = \mathcal{O}_Y(\sum v_j \cdot E_j)$ . Notons que, par hypothèse du théorème I,  $\varrho_r^* \pi^* s$  est dans  $H^0(Y_r, \mathcal{L}_r^d \otimes \mathcal{O}_{Y_r}(-t_j \cdot F_j^r))$  pour tous  $r$  et  $j$  tels que  $n_j = m_r$ . En particulier,  $\sum v_j \cdot E_j$  contient  $\sum t_j \cdot F_j$ .

**Lemme (3.3).** *Pour tous  $1 \leq r \leq l$  et  $k \geq 0$ , on a les inclusions*

- a)  $\sigma_{r*}(\omega_Y \otimes \mathcal{L}^{(i)} \otimes \mathcal{L}^k) \rightarrow \omega_{Y_r} \otimes \mathcal{L}_r^i \otimes \mathcal{O}_{Y_r}(-\sum [t_j \cdot i \cdot d^{-1}] \cdot F_j^r) \otimes \mathcal{L}_r^k$ ,
- b)  $\varrho_{r*}(\omega_Y \otimes \mathcal{L}^{(i)} \otimes \mathcal{L}^k) \rightarrow \varrho_{r*}(\omega_{Y_r} \otimes \mathcal{L}_r^i \otimes \mathcal{O}_{Y_r}(-\sum [t_j \cdot i \cdot d^{-1}] \cdot F_j^r) \otimes \mathcal{L}_r^k) \rightarrow \omega_X \otimes \mathcal{O}_X(i+k)$ .

*Preuve.* Puisque  $\sum v_j \cdot E_j$  contient  $\sum t_j \cdot F_j$ , on a l'inclusion

$$\omega_Y \otimes \mathcal{L}^{(i)} \otimes \mathcal{L}^k \rightarrow \sigma_r^*(\omega_{Y_r} \otimes \mathcal{L}_r^i \otimes \mathcal{O}_{Y_r}(-\sum [t_j \cdot i \cdot d^{-1}] \cdot F_j^r) \otimes \mathcal{L}_r^k) \otimes \mathcal{O}_Y(E)$$

où  $E$  est un diviseur effectif contenu dans le lieu exceptionnel du morphisme birationnel  $\sigma_r$ . Donc  $\sigma_{r*} \mathcal{O}_Y(E) = \mathcal{O}_{Y_r}$  et on applique la formule de projection pour obtenir a). Les inclusions b) sont alors triviales.

Rappelons-nous ici que (2.4) permet d'identifier des sections de  $\omega_X \otimes \mathcal{O}_X(i+k)$ , par l'intermédiaire de leurs restrictions à l'ouvert  $U$ , à des fonctions polynômiales sur  $\mathbb{P}^n$ , restreintes à  $X^0$ . On ramène dans ce qui suit le théorème I à l'existence de sections de  $\omega_Y \otimes \mathcal{L}^{(i)} \otimes \mathcal{L}^k$ , pour un  $k$  convenable.

**Lemme (3.4).** *Supposons que  $c_1(\mathcal{L})^{m-1} \cdot c_1(\mathcal{L}^{(i)}) > 0$  (ou bien que  $c_1(\mathcal{L}^{(i)}) > 0$  si  $m = 1$ ). Alors on a  $H^0(Y, \omega_Y \otimes \mathcal{L}^{(i)} \otimes \mathcal{L}^m) \neq 0$ .*

*Preuve.* Si  $m = \dim(Y) \geq 2$ , choisissons une section hyperplane  $H$  de  $\mathbb{P}^n$  en position générale. Appelons  $Y'$  l'image inverse dans  $Y$  de  $H$ . On a  $\omega_{Y'} = \omega_Y \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{Y'}$ .

De la suite exacte

$$0 \rightarrow \omega_Y \otimes \mathcal{L}^{(i)} \otimes \mathcal{L}^{m-1} \rightarrow \omega_Y \otimes \mathcal{L}^{(i)} \otimes \mathcal{L}^m \rightarrow \omega_{Y'} \otimes \mathcal{L}^{(i)} \otimes \mathcal{L}^{m-1} \rightarrow 0$$

et de (2.3.1), on est ramené à prouver l'existence d'une section non nulle de  $\omega_{Y'} \otimes \mathcal{L}^{(i)} \otimes \mathcal{L}^{m-1}$ .

Posons  $Z' = Z \cap H \subset H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ , et appelons  $X'$  son image inverse dans  $X$ . Alors,  $X'$  et  $Y'$  sont lisses,  $Y'$  rencontre transversalement  $\sum v_j \cdot E_j$ , le diviseur  $\sum v_j \cdot E_j|_{Y'}$  est à croisements normaux, de sorte que ce diviseur,  $\mathcal{L}^d|_{Y'}$  et  $\mathcal{L}^{(i)}|_{Y'}$  sont des données de type (2.2).

Ainsi, en procédant par récurrence sur la dimension de  $Y$ , il faut prouver l'existence d'une section du faisceau  $\omega_C \otimes \mathcal{L}^{(i)} \otimes \mathcal{L}$ , où  $C$  est la normalisation d'une intersection générique de  $Z$  avec  $\mathbb{P}^{n-m+1}$ .

Dans le cas  $m=1$ ,  $C$  est simplement  $Y$ . On a

$$\deg_C(\mathcal{L}^{(i)}) = \sum (v_j \cdot i \cdot d^{-1} - [v_j \cdot i \cdot d^{-1}]) \cdot \deg_C(E_j) \geq 0.$$

L'hypothèse signifie que  $\deg_C(\mathcal{L}^{(i)}) > 0$ . Donc on a  $\deg_C(\mathcal{L}^{(i)} \otimes \mathcal{L}) \geq 2$ . Cela garantit l'existence d'une section non nulle de  $\omega_C \otimes \mathcal{L}^{(i)} \otimes \mathcal{L}$ , indépendamment du genre de  $C$ .

*Remarque (3.5).* On a montré en fait que, sans hypothèses, on a toujours  $H^0(Y, \omega_Y \otimes \mathcal{L}^{(i)} \otimes \mathcal{L}^{m+1}) \neq 0$ .

(3.6) *Fin de la démonstration du théorème I*

Sous l'hypothèse de (3.4), on a construit une section non nulle de  $\omega_Y \otimes \mathcal{L}^{(i)} \otimes \mathcal{L}^m$ , donc (3.3, b), une section de  $\omega_X \otimes \mathcal{O}_X(i+m)$ . Par restriction à l'ouvert  $U$ , on obtient une section de  $\omega_U \otimes \mathcal{O}_U(i+m)$ . L'inclusion  $j$  de (2.4) décrit cette section comme provenant d'une section  $s^{(i)}$  de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\deg(X^0) - 2 + i)$ . Par ailleurs, au-dessus du point générique de chacun des  $X_j$ , avec  $n_j = m_r$ , on a  $\omega_{Y_r} = \varrho_r^* \omega_X \otimes \mathcal{O}((m - n_j - 1) \cdot F_j)$ , car le morphisme  $\varrho_r : Y_r \rightarrow X$  est le premier éclatement du point générique de  $X_j$  (cf. [4, II, Ex. 8.5]). La section  $s^{(i)}$  construite s'annule donc (3.3, a) à l'ordre  $[t_j \cdot i \cdot d^{-1}] - (m - n_j - 1)$  le long de  $X_j^0$ . Pour qu'elle s'annule à l'ordre  $t'_j \geq 1$  le long de  $X_j^0$ ,  $j=1, \dots, v$ , il suffit que

$$[t_j \cdot i \cdot d^{-1}] - (m - n_j - 1) \geq t'_j$$

soit

$$i \geq \{(t'_j + m - n_j - 1) \cdot d \cdot t_j^{-1}\}$$

où pour tout réel  $b$  on pose  $\{b\} = -[-b]$ . Ceci prouve le théorème I sous l'hypothèse de (3.4).

En fait, on peut toujours supposer que celle-ci est vérifiée [de même d'ailleurs que celle de (2.3.2)]: Remplaçons  $s \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$  par  $s'' \cdot s'$  tel que  $s' \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$  soit une section en position générale. Alors  $d$  est transformé en  $\eta \cdot d + 1$ ,  $t_j$  en  $\eta \cdot t_j$ .

Pour  $\eta$  suffisamment grand, on a

$$[(t'_j + m - n_j - 1) \cdot d \cdot t_j^{-1}] + 1 = [(t'_j + m - n_j - 1) \cdot (\eta \cdot d + 1) \cdot (\eta \cdot t_j)^{-1}] + 1.$$

$\mathcal{L}^{\eta \cdot d + 1}$  admet une décomposition  $\mathcal{L}^{\eta \cdot d + 1} = \mathcal{O}_Y(D + \sum v_j \cdot E_j)$ , où la partie réduite  $D$  est le diviseur associé à  $\varrho^* s'$ , ce qui donne (3.4) et donc le théorème I. [De plus, on a  $\kappa(\mathcal{O}_Y(D)) = m$ .]

#### 4. Amélioration du théorème I dans le cas où $X^0 = \mathbb{P}^n$ et $S$ est un ensemble de points

*Remarque (4.1).* Si  $X^0 = \mathbb{P}^n$ , alors la proposition (2.4) est inutile et la démonstration du théorème I est sensiblement simplifiée. En particulier, si de plus  $S$  est un ensemble de points, le théorème I redonne le théorème de Bombieri-Skoda-Waldschmidt. Pour démontrer le théorème II, il nous faut donc gagner une unité par rapport au théorème I.

Soit  $\beta$  comme dans (1.2), c'est-à-dire que  $\beta$  est inférieur ou égal à la codimension des mauvaises singularités de  $V(s)$  et vérifie  $2 \leq \beta \leq n$ . On va essayer de construire, en coupant comme dans (3.4) par des sections hyperplanes, des sections non nulles de  $\omega_Y \otimes \mathcal{L}^{(i)} \otimes \mathcal{L}^{n-\beta+1}$ . Afin de pouvoir appliquer (2.3.2), on utilise le subterfuge déjà mentionné en (3.6).

(4.2)

Posons  $n' = t' + n - 1$  et  $i = [n' \cdot d \cdot t^{-1}] + 1$ . On a  $i > n' \cdot d \cdot t^{-1}$ , et donc  $i \cdot t - n' \cdot d > 0$ . Il existe un entier  $\eta$  suffisamment grand, et un entier  $r > 0$  tels que  $i = \frac{n' \cdot (\eta \cdot d + r)}{\eta \cdot t} < \eta \cdot d + r$ . [Prendre par exemple  $\eta = k \cdot n'$  pour un entier  $k \geq 2$  et  $r = (i \cdot t - n' \cdot d) \cdot k$ .]

Posons  $\delta = \eta \cdot d + r$  et  $\tau = \eta \cdot t$ . Choisissons  $r$  sections  $s_1, \dots, s_r$  de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$  en position générale. En particulier, les diviseurs associés aux  $s_j$  ne rencontrent pas les points de  $S$ . Posons  $\sigma = s'^n \cdot s_1 \cdot \dots \cdot s_r$ . Alors  $\sigma$  est une section de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\delta)$  qui passe par les points de  $S$  avec la multiplicité au moins  $\tau$  et dont la partie réduite n'est pas triviale.

On fait la construction (3.2) de  $Y$  pour cette section  $\sigma$ , ou pour l'ancienne section  $s$ , ce qui est la même chose. Ici, on n'a qu'un seul  $Y_1$  pour  $m_1 = 0$ , et  $Y$  est simplement la désingularisation de  $\varrho_1^* V(\sigma)$ . La partie réduite de  $V(\varrho^* \sigma)$  est le diviseur associé à  $\varrho^*(s_1 \cdot \dots \cdot s_r)$  et donc de dimension de Kodaira  $n$ . Posons  $V(\sigma) = \sum m_j \cdot D_j$ , où les  $D_j$  sont irréductibles et réduits, de degrés  $d_j$ . En particulier  $\delta = \sum m_j \cdot d_j$ . De plus  $V(\sigma)$  n'a de mauvaises singularités qu'en codimension  $\beta$ .

**Lemme (4.3).** Si  $q = n' \cdot \delta \cdot \tau^{-1} - \sum [m_j \cdot n' \cdot \tau^{-1}] \cdot d_j \geq \beta$ , alors  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n' \cdot \delta \cdot \tau^{-1} - \beta)$  a une section non nulle qui s'annule en tout  $p_j$  de  $S$  à l'ordre  $t'$ .

(Rappelons que par construction  $i = n' \cdot \delta \cdot \tau^{-1}$ , et donc que  $q$  est entier.)

*Preuve.* Coupons  $V(\sigma)$  avec un  $\mathbb{P}^{\beta-1}$  générique. On obtient, d'après l'hypothèse faite sur  $\beta$ , un diviseur  $D' = \sum m_j \cdot D'_j$  de  $\mathbb{P}^{\beta-1}$ , localement à croisements normaux, de degré  $\delta$  et de composantes  $D'_j$  de degrés  $d_j$ . Appelons  $Y^{\beta-1}$  l'image inverse par  $q : Y \rightarrow \mathbb{P}^n$  de ce  $\mathbb{P}^{\beta-1}$ . On a [5, 2.3]

$$\begin{aligned} \varrho_* (\omega_{Y^{\beta-1}} \otimes \mathcal{L}^{(i)}) &= \omega_{\mathbb{P}^{\beta-1}} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{\beta-1}}(i) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{\beta-1}}(-\sum [m_j \cdot i \cdot \delta^{-1}] \cdot D'_j) \\ &= \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{\beta-1}}(-\beta + n' \cdot \delta \cdot \tau^{-1} - \sum [m_j \cdot (n' \cdot \delta \cdot \tau^{-1}) \cdot \delta^{-1}] \cdot d_j). \end{aligned}$$

Ce faisceau a donc une section non nulle. De la suite exacte

$$0 \rightarrow \omega_{Y^\beta} \otimes \mathcal{L}^{(i)} \rightarrow \omega_{Y^\beta} \otimes \mathcal{L}^{(i)} \otimes \mathcal{L} \rightarrow \omega_{Y^{\beta-1}} \otimes \mathcal{L}^{(i)} \rightarrow 0$$

où  $Y^\beta$  est l'intersection de  $Y$  avec l'image inverse par  $q$  d'un  $\mathbb{P}^\beta$  générique, et du théorème d'annulation (2.3.2), on tire l'existence d'une section non nulle de  $\omega_{Y^\beta} \otimes \mathcal{L}^{(i)} \otimes \mathcal{L}$ . Puis en appliquant (2.3.1) à la suite exacte

$$0 \rightarrow \omega_{Y^m} \otimes \mathcal{L}^{(i)} \otimes \mathcal{L}^{m-\beta} \rightarrow \omega_{Y^m} \otimes \mathcal{L}^{(i)} \otimes \mathcal{L}^{m-\beta+1} \rightarrow \omega_{Y^{m-1}} \otimes \mathcal{L}^{(i)} \otimes \mathcal{L}^{m-\beta} \rightarrow 0$$

où  $Y^m$  est l'image inverse d'un  $\mathbb{P}^n$  en position générique,  $m > \beta$ , on trouve par récurrence une section non nulle dans

$$H^0(Y, \omega_Y \otimes \mathcal{L}^{(i)} \otimes \mathcal{L}^{n-\beta+1}) \hookrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \omega_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(i+n-\beta+1)),$$

dont nous savons comme en (3.6) qu'elle s'annule à l'ordre  $-(n-1) + [\tau \cdot i \cdot \delta^{-1}] = -n+1+n' = t'$  en tout  $p_j$  de  $S$ .

Afin de finir la démonstration du théorème II, il nous reste à traiter le cas où l'on ne peut plus appliquer les théorèmes d'annulation. On raisonne alors directement et combinatoirement sur le diviseur  $V(\sigma)$ .

**Lemme (4.4).** *Si  $q = n' \cdot \delta \cdot \tau^{-1} - \sum [m_j \cdot n' \cdot \tau^{-1}] \cdot d_j \leq \beta - 1$ , alors  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n' \cdot \delta \cdot \tau^{-1} - \beta)$  a une section non nulle qui s'annule en tout  $p_j$  de  $S$  à l'ordre  $t'$ .*

*Preuve.* Puisque il existe au moins un  $j$  pour lequel  $m_j = 1$ , on a pour ce  $j$  :  $[m_j \cdot n' \cdot \tau^{-1}] = [i \cdot \delta^{-1}] = 0$ , et donc  $1 \leq q$ . Appelons  $r_j^k$  la multiplicité du point  $p_k$  sur la composante  $D_j$ . Alors, pour tout  $p_k$  de  $S$ , on a  $\tau \leq \sum_j r_j^k \cdot m_j$ .

Donc

$$n' \leq \sum_j r_j^k \cdot m_j \cdot n' \cdot \tau^{-1}$$

et

$$n' - q \leq \sum_j (r_j^k \cdot m_j \cdot n' \cdot \tau^{-1} - n' \cdot m_j \cdot d_j \cdot \tau^{-1} + [m_j \cdot n' \cdot \tau^{-1}] \cdot d_j).$$

Posons  $\alpha_j = \tau \cdot (n' \cdot m_j \cdot \tau^{-1} - [n' \cdot m_j \cdot \tau^{-1}])$ ,  $0 \leq \alpha_j < \tau$ .

On obtient

$$n' - q \leq \sum_j r_j^k \cdot [n' \cdot m_j \cdot \tau^{-1}] - \sum_j (d_j - r_j^k) \cdot \alpha_j \cdot \tau^{-1}.$$

Par définition on a  $r_j^k \leq d_j$ , et par construction (4.2), il existe un  $j_0$  pour lequel  $m_{j_0} = 1$  et  $D_{j_0}$  ne contient aucun point de  $S$ . Donc on a  $r_{j_0}^k = 0$  et  $\alpha_{j_0} > 0$ , et donc  $(d_{j_0} - r_{j_0}^k) \cdot \alpha_{j_0} \cdot \tau^{-1} > 0$ .

Ainsi on a l'inégalité stricte  $n' - q < \sum_j r_j^k \cdot [n' \cdot m_j \cdot \tau^{-1}]$ . Reformulons cette inégalité

$$t' + \beta - q \leq t' + n - q = n' - q + 1 \leq \sum_j r_j^k \cdot [n' \cdot m_j \cdot \tau^{-1}] \leq \sum_j [n' \cdot m_j \cdot \tau^{-1}] \cdot d_j. \quad (1)$$

Posons  $s' = \prod_j s_j^{[n' \cdot m_j \cdot \tau^{-1}]}$  où  $s_j$  définit le diviseur  $D_j$ . L'inégalité (1) étant vraie pour tout  $k$ ,  $s'$  s'annule à l'ordre au moins  $t' + \beta - q$  en chaque point  $p_k$  de  $S$ .

Différentions  $\beta - q$  fois  $s'$  dans des directions génériques de telle sorte que les dérivées ne deviennent pas identiquement nulles. On obtient ainsi une section  $s_1$  qui s'annule aux points  $p_j$  à l'ordre  $t'$  et qui est de degré

$$\sum_j [n' \cdot m_j \cdot \tau^{-1}] \cdot d_j - (\beta - q) = i - \beta.$$

*Remarque (4.5).* Le cas (4.4) est en fait le moins intéressant, puisque le degré du diviseur  $V(\sigma)$  est très grand par rapport à ce qui serait nécessaire en exigeant la multiplicité  $t$  en les points de  $S$ . L'inégalité (1) dit en fait qu'on aurait pu différentier  $n - q$  fois au lieu de  $\beta - q$  fois. On aurait dans ce cas obtenu l'estimation de Chudnovsky (\*) de l'introduction.

*Remerciement.* Michel Demazure nous a demandé si les méthodes développées dans [2] pouvaient être appliquées à la résolution de ce genre de question. Qu'il en soit ici chaleureusement remercié.

## Bibliographie

1. Esnault, H.: Fibre de Milnor d'un cône sur une courbe plane. *Invent. Math.* **68**, 477–496 (1982)
2. Esnault, H., Viehweg, E.: Revêtements cycliques. *Proc. Conf. Algebraic Threefolds, Varenna 1981*, pp. 241–251. In: *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 947. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1982
3. Grauert, H., Riemenschneider, O.: Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Räumen. *Invent. Math.* **11**, 263–292 (1970)
4. Hartshorne, R.: *Algebraic geometry*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1977
5. Viehweg, E.: Vanishing theorems. *J. reine angew. Math.* **335**, 1–8 (1982)
6. Waldschmidt, M.: Nombres transcendants et groupes algébriques. *Astérisque* 69/70
7. Wüstholz, G.: On the degree of algebraic hypersurfaces with given singularities (manuscript)
8. Wüstholz, G.: Nullstellenabschätzungen auf Varietäten. *Séminaire Delange-Poitou-Pisot*, Octobre 1981

Reçu le 24 septembre 1982: révisé le 17 décembre 1982